Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
ВОЛГОГРАДСКИЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ КАДРОВЫХ РЕСУРСОВ

М А Т Е М А Т И К А

1 курс

I. Решить иррациональное уравнение:

1) $\sqrt{x^2-7}=3$;
2) $\sqrt{x-5}=\sqrt{3-x}$;
3) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=5$;
4) $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$;
5) $\sqrt{x}=2-x$:
6) $x-\sqrt{x+1}=1$;
7) $(x^2-9)\sqrt{2-x}=0$;
8) $x-1=\sqrt{x+5}$;
9) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$;
10) $\sqrt{6x+1}-\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$.

II. Решить иррациональное неравенство:

1) $\sqrt{2x+7}\le x+2$;
2) $\sqrt{x+4}\ge x-2$
3) $\sqrt{x+9}>x-3$;
4) $x+8\ge 6\sqrt{x-1}$;
5) $x<\sqrt{2-x}$;
6) $x+1>\sqrt{2+x}$;
7) $\sqrt{(2x-5)^2}>5$;
8) $\sqrt{x^2}<x+1$;
9) $\sqrt{9-24x+16x^2}\le 8$;
10) $\sqrt{x^2-x-1}\le 1$.

III. Решить показательное уравнение:

1) $10^x=1000$;
2) $2^{1-x}=8$;
3) $2^{1-x}=5$;
4) $5^x=7^x$;
5) $5^{x-1}+5^x+5^{x+1}=31$;
6) $25^x-5^x=20$;
7) $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$;
8) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{3x-1}=\left(\dfrac{5}{4}\right)^{2x-9}$;
9) $2^{x^2+x-6}-2^{x^2+x-9}=56$;
10) $25^x-6\cdot 5^x+5=0$.

IV. Решить показательное неравенство

1) $2^{2-x}<\dfrac{1}{4}$;
2) $3^x>4$;
3) $6^{x^2-7x+12}>1$;
4) $(x+3)^{x^2-5x+6}>1$;
5) $2^x\cdot 5^{x-1}<0{,}2\cdot 10^x\cdot 2^{-x}$;
6) $3^{x+1}-5^x+3^{x-1}-5^{x-1}>5^{x-2}-3^{x-2}$;
7) $2^{x+2}+8^x\ge 5\cdot 4^x$;
8) $2\cdot 25^x-5\cdot 10^x+2\cdot 4^x\le 0$;
9) $6^x+9^x\le 2^{2x}+1$;
10) $5^{2x+1}-5^{x+2}\le 5^x-5$.

Справочный материал

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$D=b^2-4ac$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$\sqrt[n]{a}=b \quad\Leftrightarrow\quad b^n=a$

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a \quad (a\ge 0)$

$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, & a\ge 0\\ -a, & a<0\end{cases}$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad\Rightarrow\quad \sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b\ne 0)$

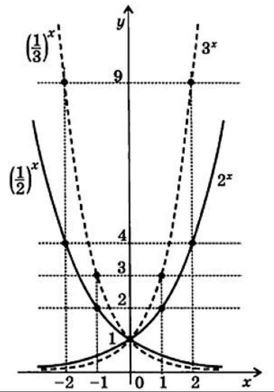
$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \quad 0\le a<b$

$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g^2(x)\\ g(x)\ge 0\end{cases}$

$\sqrt{f(x)}\le g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\le g^2(x)\\ f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\end{cases}$

$\sqrt{f(x)}\ge g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge g^2(x)\\ g(x)\ge 0\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\ge 0\\ f(x)<0\end{cases}\end{array}\right.$

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ
$y=a^x$, где $a>0$, $a\ne 1$*)



$a>0,\ b>0$

$a^x>0$

$a^0=1$

$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$

$\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

$(a^x)^y=a^{x\cdot y}$

$a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$

$a^x\cdot b^x=(ab)^x$

$\dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

$a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x) \qquad a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)\log_c a=g(x)\log_c b$

$(a>1)\ a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$

$(0<a<1)\ a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$

V. Решить логарифмическое уравнение:

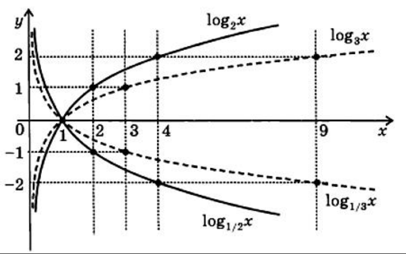
1) $\log_2(2-x)=3$;
2) $\log_2(2-x)=\log_2(5-2x)$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x+2\log_2 x+\log_4 x=3$;
4) $\ln(3x-5)=0$;
5) $2\log_{0,5} x=\log_{0,5}(2x^2-x)$;
6) $\log_2(4-x)+\log_2(1-2x)=2\log_2 3$;
7) $\ln(x^2-6x+9)=\ln 3+\ln(x+3)$;
8) $2\log_3^2 x-7\log_3 x+3=0$;
9) $\dfrac{3\lg x+19}{3\lg x-1}=2\lg x+1$.

VI. Решить логарифмическое неравенство

1) $\log_2(2-x)<0$;
2) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x>36$;
3) $2+\log_2(x+1)>1-\log_{\frac{1}{2}}(4-x^2)$;
4) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1)-\log_{\frac{1}{3}} 6>0$;
5) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)\le 2$;
6) $(x+1)\log_{0,7} 3-\log_{0,7} 27>0$;
7) $\lg(2x-51)-\lg(22-x)\ge 2$;
8) $\lg(2x-51)-\lg(22-x)\ge 2$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

$y=\log_a x$, где $a>0,\ a\ne 1$



$x=a^{\log_a x}\quad (x>0)$

$\log_a a=1$ | $\log_a 1=0$

$\log_{a^p} x=\dfrac{1}{p}\log_a x$

$\log_{a^p} x^p=\log_a x$

$\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}\quad x>0$

$\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$

$\log_a \dfrac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$

$(a>0,a\ne1)\quad \log_a x=b \Leftrightarrow a^b=x$

$\log_a f(x)=\log_a g(x)\ (a>0,\ a\ne1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0,\ g(x)>0 \end{cases}$

$\log_{g(x)} f(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^b(x) \\ g(x)>0,\ f(x)>0 \\ g(x)\ne 1 \end{cases}\qquad \log_{g(x)} f(x)=\log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=h(x) \\ f(x)>0,\ h(x)>1 \\ g(x)>0,\ g(x)\ne 1 \end{cases}$

VII. Решить тригонометрическое уравнение:

1) $\sin x=0{,}1$;
2) $\cos x=-\dfrac{1}{4}$;
3) $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{2}$;
4) $\operatorname{ctg} x=0{,}2$;
5) $\cos\dfrac{x}{3}=-\dfrac{1}{2},\quad x\in[-2\pi;0)$;
6) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=-\dfrac{1}{2},\quad x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$;
7) $2\sin^2 2x-1=0,\quad x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$;
8) $\sin x+\cos 2x+2=0$.
9) $\sin x+\sin 2x+\operatorname{tg} x=0$

VIII. Решить тригонометрическое неравенство:

1) $\dfrac{1}{3}\sin 3x>\dfrac{1}{\sqrt{12}}$;
2) $\cos^2 2x+3\cos x>0$;
3) $\cos^2 2x-4\sin x<0$;
4) $2\sin^2 2x+3\sin x-2>0$;
5) $\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\ge 1$;
6) $\sin x<\cos x$;
7) $\sin^2 x<\sin x$;
8) $\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x>0$;
9) $2\cos^2 x+2\cos x+2\ge 0$;
10) $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x>0$.

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}\quad x\ne\dfrac{\pi}{2}(2n+1), n\in Z$

$\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}\quad x\ne \pi n, n\in Z$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

α	0^0 (0)	30^0 $(\pi/6)$	45^0 $(\pi/4)$	60^0 $(\pi/3)$	90^0 $(\pi/2)$	180^0 (π)	270^0 $(3\pi/2)$	360^0 (2π)
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1

$\sin x=a \Rightarrow x=(-1)^k \arcsin a+\pi k$

$\cos x=a \Rightarrow x=\pm\arccos a+2\pi k$

$\operatorname{tg} x=a \Rightarrow x=\operatorname{arctg} a+\pi k$

$\operatorname{ctg} x=a \Rightarrow x=\operatorname{arcctg} a+\pi k$